「数　学」

試験時間　100 分

配点　　　150 点

【過去問題に関する追記】
「答え」のみ記入する解答と、「途中式・考え方」を記入する解答がある。

【1】 以下の(1)，(2)の各問いで，空欄にあてはまる数を答えよ．

(1) 3 人がジャンケンをして，負けた人から抜けていき，1 人が勝ち残るまで続けるものとする．

最初にジャンケンを 1 回するとき，3 人の手の出し方は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りあるから，この 1 回目でジャンケンが終わる確率は，誰が勝つか，どの手で勝つかを考えることにより $\boxed{\text{イ}}$ である．また，1 回目で誰も抜けない確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

2 回目でジャンケンが終わるのは

(A) 1 回目で 1 人が抜け，2 回目で 1 人が勝つ場合

(B) 1 回目には誰も抜けず，2 回目で 1 人が勝つ場合

がある．

(A)が起こる確率は $\boxed{\text{エ}}$ ，(B)が起こる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であり，(A)，(B)のことがらは互いに排反であるから，2 回目でジャンケンが終わる確率は $\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}$ で求められる．

(2) ① 数列 $\{a_n\}$: $\frac{1}{1\cdot 3}$, $\frac{1}{2\cdot 4}$, $\frac{1}{3\cdot 5}$, $\frac{1}{4\cdot 6}$, ……

の第 n 項は $a_n=\boxed{\text{カ}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{\text{キ}}}\right)$

と表されるから，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\boxed{\text{ク}}-\frac{2n+\boxed{\text{ケ}}}{2(n+1)(n+2)}$$

である．

② $a_1=1$, $a_{n+1}=-2a_n+9$ ($n=1$, 2, 3, ……)

で定められる数列 $\{a_n\}$ について

$$a_{n+1}-\boxed{\text{コ}}=-2(a_n-\boxed{\text{コ}})$$

が成り立つから，$\{a_n\}$ の第 n 項 は

$$a_n = (\boxed{\text{サ}})^n + \boxed{\text{シ}}$$

であり，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{ス}}(\boxed{\text{サ}})^n + \boxed{\text{セ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}$$

である．

【2】 四面体 OABC の各辺の長さが AB＝CA＝OB＝OC＝3，OA＝BC＝4 であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，として，以下の各問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) ∠AOB の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(3) △ABC の面積 S を求めよ．

(4) 頂点 O から平面 ABC に垂線を引き，平面 ABC との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ.

(5) 四面体 OABC に外接する球の半径 R を求めよ．

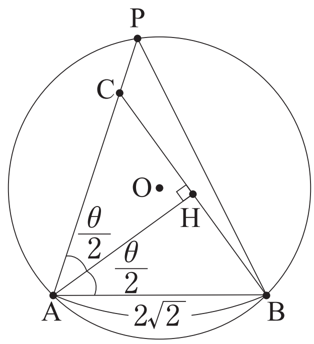
【3】　次の各問いに答えよ．

(1)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3)　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\alpha$ とおくとき，$\sin\theta$ を α を用いて表せ．

(4)　点 O を中心とする半径 2 の円において，長さが $2\sqrt{2}$ の弦 AB と，大きい方の $\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P がある．ただし，$\angle PAB$ が鋭角の範囲で点 P は動く．



①　$\angle PAB$ の二等分線に点 B から垂線を引き，その二等分線との交点を H とし，直線 BH と線分 PA との交点を C とする．$\angle PAB=\theta$ として，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ のとき，線分 PC の長さを求めよ．

②　PA + PB の最大値を求めよ．答えに二重根号が含まれる場合は，外さずにそのままでよい．

【4】 以下の各問いに答えよ．

(1) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+x$ 上の x 座標が 2 の点における接線の方程式を求めよ．

(2) 定積分 $I=\int_0^3 |x^2-x|\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $y=\frac{2x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描け．ただし，関数が極値をとる点や変曲点が存在する場合は，それらの点を黒丸にし，座標をグラフに書き込むこと．

(4) n を 0 以上の整数として，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とする． ただし，以下では $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して $\sin^0 x=1$ が成り立つことを用いても良い．

① $n \geqq 2$ のとき，I_n を I_{n-2} の式で表せ．さらに，nI_nI_{n-1} を求めよ．

② $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$0 \leqq \sin x \leqq 1$ であることに着目して，$\lim_{n \to \infty} nI_n^2$ を求めよ．